

## AUTEUR

Franck Rolland, ing. dipl. EPFL  
Chef de la section signalisation  
Service des routes du canton de Vaud

## Résumé

Les manuels de construction routière expliquent généralement que la courbe de transition décrite par un véhicule simple entre une ligne droite et un arc de cercle est une clothoïde, en considérant que les paramètres "vitesse du véhicule" et "vitesse de rotation du volant" sont des constantes. Mais sur la base de quelques considérations intuitives, il est évident que cette courbe ne peut pas être une clothoïde. Une approche purement mathématique de la question montre qu'il s'agit en fait d'une courbe du type "litéaire". (\*)

(\*) *Litéaire* vient du latin *linteum* "rideau", car la courbe prend la forme des plis.

## CETTE CLOTHOÏDE QUI N'EN EST PAS UNE...

Le problème est simplement posé : prenez une automobile standard, deux essieux et traction avant, roulant à vitesse constante, dont le conducteur imprime au volant un mouvement de rotation uniforme. Comment décrire la trajectoire suivie par le véhicule ?

Appelons cette trajectoire "courbe de giration". Pour la majorité des professionnels de la route, voire la totalité, il s'agit d'une clothoïde, ou spirale de Cornu, dont la courbure est directement proportionnelle à l'abscisse curviligne. En conséquence, lorsque l'abscisse curviligne "s" tend vers l'infini, le rayon "R(s)", qui est l'inverse de la courbure, tend vers zéro, ce qui se traduit par la relation bien connue des projeteurs routiers :

$$R(s) = \frac{A^2}{s}$$

où A est appelé paramètre de la clothoïde.

Oublions l'aspect pratique du problème limité par les contraintes mécaniques et géométriques du véhicule, et abordons la question d'un point de vue strictement mathématique. Considérons alors un véhicule dont l'angle de braquage  $\alpha$  varie de 0 à l'infini (par simplification, le terme "angle de braquage" représente en fait la moyenne des angles de braquage des roues de l'essieu avant). Gardons

## DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

Dr.-Ing. Roland Weinert  
Brilon Bondzio Weiser GmbH

## Zusammenfassung

Die Entwurfsrichtlinien für Strassen erklären generell, dass die Übergangskurve, welche durch ein einfaches Fahrzeug zwischen einer Gerade und einem Kreisbogen beschrieben wird, eine Klothoide ist, unter Berücksichtigung der konstanten Parameter „Fahrzeuggeschwindigkeit“ und „Drehgeschwindigkeit des Lenkrades“. Auf Basis von einigen intuitiven Betrachtungen ist es jedoch offensichtlich, dass diese Kurve nicht eine Klothoide sein kann. Eine rein mathematische Annäherung dieser Frage zeigt, dass es sich in Wirklichkeit um eine Kurve des Typs „elastische“ Kurve handelt.

## DIE KLOTHOIDE, DIE KEINE IST...

Das Problem ist einfach beschrieben: Nehmen wir ein Standardfahrzeug, zweiachsig mit Frontantrieb, das sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, während der Fahrer am Lenkrad eine gleichmäßige Drehung ausführt. Wie lässt sich die Fahrlinie dieses Fahrzeugs beschreiben?

Nennen wir diese Fahrlinie „Rotationskurve“. Für die Mehrzahl der Straßenbaufachleute handelt es sich um eine Klothoide, oder Cornu-Spirale, dessen Krümmung proportional zur Bogenlänge ist. Da die Krümmung "s" gegen unendlich tendiert, nähert sich der Radius "R(s)" Null an, da er der Kehrwert der Krümmung ist. Dieser Zusammenhang lässt sich sehr gut aus der im Straßenbau bekannten Beziehung ableiten:

wobei A als Klothoidenparameter bezeichnet wird.

Vernachlässigen wir einmal die praktischen Einschränkungen des Problems, die sich aus den mechanischen und geometrischen Randbedingungen des Fahrzeugs ergeben und nähern wir uns dem Problem rein mathematisch. Stellen wir uns ein Fahrzeug vor, dessen Lenkwinkel  $\alpha$  zwischen 0 und unendlich variiert. (zur Vereinfachung entspricht der Begriff Lenkwinkel

comme hypothèses la vitesse constante du véhicule et la variation linéaire de  $\alpha$  en fonction du temps.

dem Mittelwert der Lenkwinkel der beiden Räder an der Vorderachse). Stellen wir als Hypothese eine konstante Fahrzeuggeschwindigkeit und eine lineare Veränderung von  $\alpha$  als Funktion der Zeit auf.

$$s = v \cdot t \quad \text{et / und} \quad \alpha = \omega \cdot t$$

$v$  : vitesse linéaire [km/h ou m/s]

$\omega$  : vitesse angulaire [°/s ou rd/s]

$t$  : temps [s]

L'angle de braquage est donc lié à l'abscisse

curviligne par la relation  $\alpha = s \frac{\omega}{v}$  que l'on simplifiera en notant  $\alpha = \lambda s$ .

Dans cette dernière relation, on appellera  $\lambda = \frac{\omega}{v}$  le coefficient linéaire de braquage.

**Remarque :** Notons que  $v$  représente en fait, non pas la vitesse du véhicule, mais la vitesse moyenne des roues de l'essieu avant. En effet, en courbe, les deux essieux n'ont pas la même vitesse, les roues du côté extérieur du virage ont une vitesse supérieure à celle des roues du côté intérieur. De même la vitesse moyenne des roues de l'essieu avant est supérieure à la vitesse moyenne des roues de l'essieu arrière dont on notera la vitesse " $v_r$ ". Sur la Figure 1 : trajectoires comparées des essieux avant et arrière ci-dessous, on comprendra le pourquoi de cette nuance, puisqu'en effet, plus l'angle de braquage s'approche de  $90^\circ$ , plus la vitesse moyenne des roues de l'essieu arrière est faible. Avec un angle de braquage théorique de  $90^\circ$  cette vitesse est nulle, et le véhicule pivote autour du point central de l'essieu arrière.

$v$  : lineare Geschwindigkeit [km/h oder m/s]

$\omega$  : Winkelgeschwindigkeit [°/s oder rad/s]

$t$  : Zeit [s]

Folglich ist der Lenkwinkel abhängig von der

Krümmung aufgrund der Beziehung  $\alpha = s \frac{\omega}{v}$  die sich zu  $\alpha = \lambda s$  vereinfachen lässt.

In der letzten Gleichung bezeichnen wir  $\lambda = \frac{\omega}{v}$  als Lenkeinschlagkoeffizienten.

**Anmerkung:** Halten wir fest, dass  $v$  eigentlich nicht der Geschwindigkeit des Fahrzeugs, sondern der mittleren Geschwindigkeit der Räder an der Vorderachse entspricht. Tatsächlich drehen sich die beiden Räder an der Vorderachse bei Kurvenfahrt nicht mit der gleichen Geschwindigkeit. Die Räder an der Kurvenaußenseite drehen sich schneller als an der Kurveninnenseite. In der gleichen Weise ist die mittlere Geschwindigkeit der beiden Räder an der Vorderachse größer als an der Hinterachse, die wir als Geschwindigkeit " $v_r$ " bezeichnen wollen. Abb. 1 zeigt im Vergleich die Fahrlinien der Vorder- und der Hinterachse. Damit wird deutlich, warum dieser geringfügige Unterschied relevant ist. Insbesondere da die mittlere Geschwindigkeit der Räder an der Hinterachse vernachlässigbar wird, je mehr sich der Lenkwinkel  $90^\circ$  annähert. Bei einem theoretischen Lenkwinkel von  $90^\circ$  wäre diese Geschwindigkeit Null und das Fahrzeug würde sich um den Mittelpunkt der Hinterachse drehen.

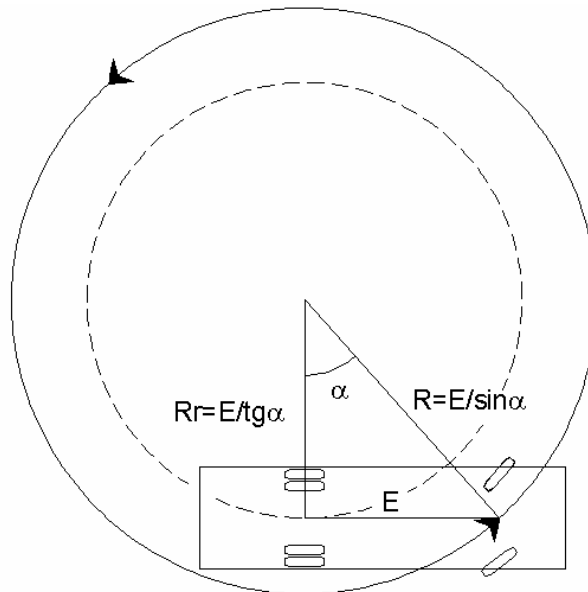


Figure 1 : trajectoires comparées des essieux avant et arrière  
 Abb. 1: Fahrlinien der Vorderachse und der Hinterachse im Vergleich

Dans un intervalle de temps  $dt$  l'essieu avant parcourt un arc de cercle de longueur  $ds = R d\alpha$ . La vitesse de l'essieu avant est alors  $v = ds/dt$ .

Simultanément, l'essieu arrière parcourt un arc de cercle de longueur  $ds_r = R_r d\alpha$ , et la vitesse de l'essieu arrière est  $v_r = ds_r/dt$

Ainsi, avec les expressions de  $R$  et  $R_r$  de la figure ci-dessus, on a :

In einem Zeitintervall  $dt$  beschreibt die Vorderachse einen Kreisbogen der Länge  $ds = R d\alpha$ . Die Geschwindigkeit der Vorderachse ist folglich  $v = ds/dt$ .

Gleichzeitig legt die Hinterachse einen Kreisbogen der Länge  $ds_r = R_r d\alpha$  zurück und die Geschwindigkeit der Hinterachse beträgt  $v_r = ds_r/dt$ .

Daraus ergibt sich mit den Ausdrücken für  $R$  und  $R_r$  aus der obigen Abbildung:

$$V_r = V \cos \alpha$$

Ce qui correspond bien à une vitesse  $V_r$  de l'essieu arrière toujours inférieure à  $v$ , et logiquement nulle en cas de braquage à  $90^\circ$ . Notons qu'à l'inverse, pour un véhicule à propulsion arrière et non plus à traction avant, l'hypothèse  $V_r = \text{constante}$ , impliquerait des développements différents de ceux qui suivent, avec notamment une limite infinie de la vitesse des roues avant lorsque  $\alpha$  tend vers  $90^\circ$ .

Dieses korrespondiert mit der Tatsache, dass die Geschwindigkeit  $V_r$  der Hinterachse immer geringer ist als  $V$  und gleich Null ist, wenn der Lenkwinkel  $90^\circ$  beträgt. Umgekehrt gilt für ein Fahrzeug mit Heckantrieb, dass die Hypothese  $V_r = \text{konstant}$  zu anderen Folgerungen führt als im Folgenden beschrieben, insbesondere mit einem unendlichen Grenzwert für die Geschwindigkeit der Vorderräder, wenn sich  $\alpha$   $90^\circ$  annähert.

## CONSIDÉRATIONS INTUITIVES

Avant de pousser plus loin les développements théoriques, il est intéressant de se poser les questions suivantes :

1. Si la courbure de la trajectoire est liée à l'abscisse curviligne, elle-même liée à l'angle de braquage, comment concilier le caractère nécessairement oscillatoire et répétitif de période  $2\pi$  inhérent à toute expression fonction d'un angle (exprimé en radians), avec l'idée d'un point asymptote autour duquel s'enroulerait la trajectoire, si celle-ci est une spirale (ou une clothoïde) ?

2. Si le coefficient linéaire de braquage  $\lambda = \frac{\omega}{v}$  reste en deçà d'un certain seuil, lorsque l'angle de braquage  $\alpha$  est proche de  $90^\circ$  ou de  $270^\circ$ , la trajectoire se rapproche d'un cercle dont le rayon est égal l'entraxe du véhicule E, et ne peut pas descendre en dessous. Dès lors, comment concilier la notion de point asymptote caractéristique d'une spirale avec cette particularité de la trajectoire qui en limite le rayon ?

3. En construction routière, on considère qu'un cercle de rayon R lié à une droite par une clothoïde de longueur L et de paramètre A, se trouve décalé d'une par rapport à la droite initiale, et que ce décalage, appelé aussi excentricité, a pour valeur approchée  $\frac{L^2}{24R}$

## GEDANKENSPIELE

Bevor wir uns weiter mit theoretischen Entwicklungen beschäftigen, scheint es ratsam, sich die folgenden Fragen zu stellen:

1. Wenn die Krümmung der Fahrlinie abhängig ist von der Bogenlänge, die selbst wiederum abhängt vom Lenkwinkel, wie erhält man den oszillierenden und wiederkehrenden Charakter mit der Periode  $2\pi$ , der jeder Winkelfunktion innewohnt (ausgedrückt in Radiant), wenn eine Spirale (oder eine Klothoide) die Idee eines asymptotischen Punktes verfolgt, um den herum sich die Fahrlinie immer enger aufwickelt.

2. Wenn der lineare Lenkwinkel-Koeffizient  $\lambda = \frac{\omega}{v}$  einen bestimmten Wert nicht überschreitet und der Lenkwinkel  $\alpha$  nahe bei  $90^\circ$  oder  $270^\circ$  ist, nähert sich die Fahrlinie einem Kreis mit einem Radius des Radstandes E des Fahrzeugs, und kann nicht kleiner werden. Wie lässt sich diese Beschränkung des Radius mit dem charakteristischen asymptotischen Konvergenzpunkt vereinbaren ?

3. Im Straßenbau ist von Bedeutung, dass ein Kreisbogen mit Radius R, der mit einer Geraden über eine Klothoide mit der Länge L und dem Parameter A verknüpft ist, eine Abrückung von der Tangente im Nullpunkt aufweist, die sich näherungsweise über die Beziehung  $\frac{L^2}{24R}$  errechnet.

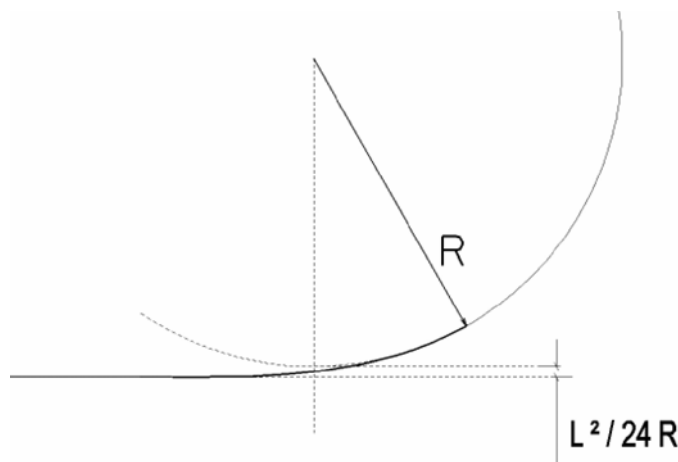


Figure 2 : Excentricité de la clothoïde  
Abb. 2 : Abrückmaß der Klothoide

On considère ainsi que lorsque la longueur de la clothoïde tend vers 0, la trajectoire limite est un arc de cercle tangent à la droite initiale. Dans le cas de la trajectoire de giration d'un véhicule, le cas limite d'une vitesse de braquage infinie (qui correspond à un braquage à l'arrêt) donne la trajectoire suivante :

Geht man also davon aus, dass die Länge der Klothoide gegen Null geht, beschreibt die Fahrlinie einen Kreisbogen tangential zur einleitenden Geraden. Für ein Fahrzeug bei Kurvenfahrt ergibt sich bei einer unendlichen Lenkgeschwindigkeit (bis zum Anschlag) die folgende Fahrlinie:

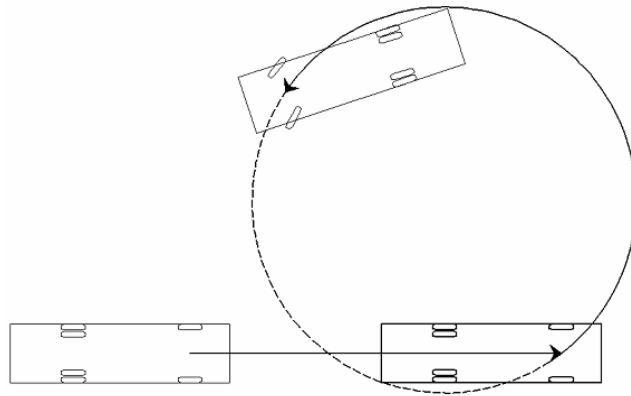


Figure 3 : trajectoire avec braquage à l'arrêt  
Abb. 3 : Fahrlinie bei maximalem Lenkeinschlag

Selon la vitesse de braquage, le cercle peut prendre une infinité de position entre la position limite illustrée ci-dessus sécante à la droite et une position quelconque, sécante à la droite initiale, ou plus ou moins décalée selon le coefficient linéaire de braquage. Pour les vitesses basses, le cercle n'est pas décalé par rapport à la droite initiale, il est sécant. Cette particularité est contradictoire avec la notion d'excentricité décrite dans les manuels de construction routière.

In Abhängigkeit von der Lenkgeschwindigkeit kann der Kreis unendlich viele Positionen annehmen zwischen der oben dargestellten Extremposition im Schnittpunkt mit der Eingangsgeraden (sodass die Gerade eine Sekante mit zwei Schnittpunkten am Kreis darstellt) und einer mehr oder weniger starken Verschiebung der Geraden, bis hin zur Tangente mit nur einem Schnittpunkt. Für geringe Geschwindigkeiten ergibt sich für den Kreis keine Abrückung von der einleitenden Geraden, er ist sekkant. Diese Besonderheit widerspricht dem Begriff der Exzentrizität in den Entwurfsrichtlinien.

Sans aller plus loin dans le raisonnement, on peut constater que, poussée aux limites, la spirale de Cornu n'apporte pas de réponse aux trois questions précédemment posées, et qu'il y a une lacune théorique à combler. C'est la raison pour laquelle ont été développés les calculs qui vont suivre et dont le but est de décrire précisément la trajectoire de notre véhicule, dont on peut affirmer sur la base des 3 interrogations qui précèdent qu'elle n'est pas une clothoïde !

Ohne diese Überlegungen weiterzutreiben, lässt sich festhalten, dass die Cornuspirale für die Grenzwertbetrachtungen keine Antworten auf die drei oben gestellten Fragen liefert und dass es eine theoretische Lücke zu schließen gibt. Aus diesem Grund wurden die im folgenden beschriebenen Berechnungen angestellt, mit dem Ziel, die Fahrlinie unseres Fahrzeugs präzise zu beschreiben, sodass wir auf der Grundlage der drei Fragen behaupten, dass es sich dabei nicht um eine Klothoide handelt!

## Développements théoriques

Considérons la trajectoire d'un véhicule d'entraxe  $E$ , roulant à vitesse constante, et dont le conducteur tourne son volant à vitesse constante.

## Theoretische Herleitung

Unterstellen wir ein Fahrzeug mit Radstand  $E$ , das mit konstanter Geschwindigkeit fährt und dessen Fahrer das Lenkrad mit konstanter Geschwindigkeit dreht.

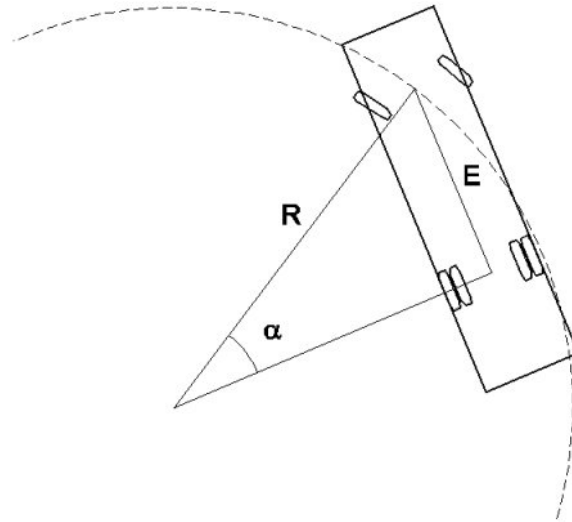


Figure 4 : véhicule en giration  
Abb. 4 : Fahrzeug bei Kurvenfahrt

Les paramètres qui décrivent le mouvement sont :

- Vitesse du véhicule [m/s]:  $v$
- Abscisse curviligne [m] :  $s = v t$
- Vitesse angulaire de braquage [rad/s] :  $\omega$
- Angle de braquage [rad] :  $\alpha = \omega t$
- Quotient linéaire de braquage [rad/m] :

$$\lambda = \frac{\alpha}{s} = \frac{\omega}{v}$$

A tout moment, (Figure 4 : véhicule en giration) le rayon instantané de la trajectoire est lié à l'angle de braquage par une relation qui nous donne la première équation intrinsèque d'une courbe transcendante définissant la trajectoire du véhicule :

$$R(\alpha) = \frac{E}{\sin(\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad R(s) = \frac{E}{\sin(\lambda s)}$$

Équation 1 : équation intrinsèque 1 de la trajectoire  
Gleichung 1 : 1. innewohnende Gleichung der Kurvenlinie

La courbure d'une clothoïde est directement proportionnelle à l'abscisse curviligne, alors que dans le cas de la courbe de giration qui nous intéresse, la courbure est proportionnelle au sinus de l'abscisse curviligne. Notons toutefois que pour les valeurs telles que  $\alpha \approx \sin \alpha$ , (ou  $\lambda s \approx \sin \lambda s$ )

Die folgenden Parameter, beschreiben die Bewegung:

- Geschwindigkeit des Fahrzeugs [m/s]:  $v$
- Bogenlänge [m] :  $s = v t$
- Winkelgeschwindigkeit [rad/s] :  $\omega$
- Lenkwinkel [rad] :  $\alpha = \omega t$
- Linearer Lenkwinkelkoeffizient [rad/m] :

$$\lambda = \frac{\alpha}{s} = \frac{\omega}{v}$$

Zu jedem Zeitpunkt (siehe Abb. 4 : Fahrzeug bei Kurvenfahrt) lässt sich der momentane Radius der Kurvenlinie in Abhängigkeit vom Lenkwinkel durch folgende Beziehung errechnen:

Die Krümmung der Klothoide ist proportional zur Bogenlänge, sodass im Fall der uns interessierenden Fahrkurve deren Krümmung proportional zum Sinus der Bogenlänge ist. Halten wir jedoch fest, dass für Werte von  $\alpha \approx \sin \alpha$ , (oder  $\lambda s \approx \sin \lambda s$ ) ist die Gleichung der Fahrkurve

l'équation de la courbe de giration est proche de celle de la clothoïde. Ceci est valable jusqu'à une valeur de  $\alpha$  proche de 0,7 rad, soit environ 40°. Ceci explique l'approche classique du problème qui tend à considérer la courbe de giration comme une clothoïde, puisque l'angle de braquage de la majorité des véhicules excède rarement 40°.

Une deuxième équation intrinsèque de la trajectoire peut être définie sur la base de l'illustration suivante :

ähnlich der Gleichung der Klothoide. Dies gilt für Werte von  $\alpha$  bis zu 0,7 rad., also etwa 40°. Das erklärt den klassischen Ansatz, die Fahrkurve wie eine Klothoide zu behandeln, zumal der Lenkwinkel bei den meisten Fahrzeugen kaum 40° überschreitet.

Eine zweite Gleichung lässt sich auf der Grundlage der folgenden Darstellung ableiten:

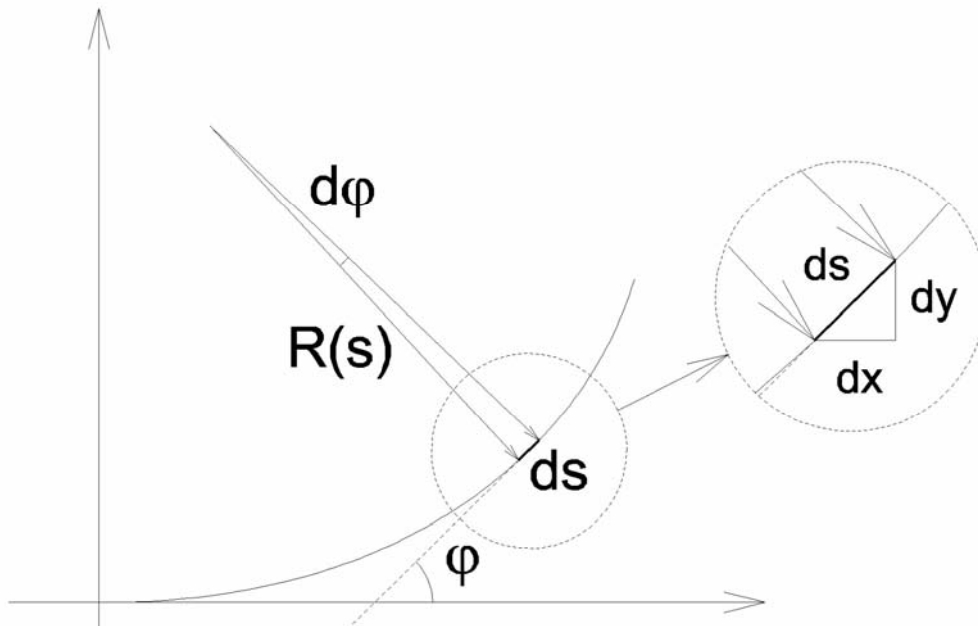


Figure 5 : équation intrinsèque 2  
Abb. 5 : 2. innewohnende Gleichung der Kurvenlinie

En tout point de la trajectoire l'angle de la tangente, appelé  $\varphi$ , est lié à l'abscisse  $s$  par l'équation intrinsèque de Cesaro qui lie l'abscisse curviligne et le rayon instantané de la courbe  $R(s)$  à l'orientation de la courbe par la relation :

In jedem Punkt der Fahrlinie ist der Tangentenwinkel  $\varphi$  abhängig vom Wert  $s$  über die innewohnende Gleichung nach Cesaro, die die Bogenlänge und den momentanen Radius der Kurve  $R(s)$  mit der Kurvenorientierung verknüpft :

$$\frac{ds}{d\varphi} = R_s$$

Équation 2 : équation intrinsèque de Césaro  
Équation 2 : innewohnende Gleichung nach Cesaro

Pour des questions de facilité de notation, posons :

Zur Vereinfachung der Schreibweise legen wir fest:

$$a = \frac{2}{\lambda} \quad \text{et / und} \quad k = \frac{v}{\omega E} = \frac{1}{\lambda E}$$

L'Équation 1 : équation intrinsèque 1 de la trajectoire donne :

Die 1. innewohnende Gleichung der Kurvenlinie liefert :

$$\frac{1}{R(\alpha)} = \frac{2k}{a} \sin\left(\frac{2s}{a}\right)$$

en combinant avec l'équation 2, équation intrinsèque de Césaro on obtient :

in Kombination mit der 2. innewohnenden Gleichung nach Cesaro erhält man :

$$\varphi = \frac{2k}{a} \int \sin\left(\frac{2}{a}s\right) ds$$

soit à une constante près après intégration :

$$\varphi = k \sin^2 \frac{s}{a}$$

$$\varphi = k \sin^2 \frac{s}{a}$$

Cette approche donne lieu au système suivant pour la paramétrisation cartésienne de la trajectoire :

Dieser Ansatz lässt sich durch folgendes Gleichungssystem ersetzen, um kartesische Koordinaten der Fahrlinie zu ermitteln:

$$\begin{cases} x = a \int_0^t \cos(k \sin^2 u) du \\ y = a \int_0^t \sin(k \sin^2 u) du \end{cases}$$

avec / mit  $t = \frac{s}{a}$

En utilisant l'équation intrinsèque dite de Wewhell,

$\frac{dz}{ds} = e^{i\varphi}$  on peut obtenir une paramétrisation complexe de la courbe de giration du véhicule:

Durch Anwendung der sogenannten Gleichung nach

Wewhell  $\frac{dz}{ds} = e^{i\varphi}$  erhält man eine komplexe Parametrisierung der Fahrkurve:

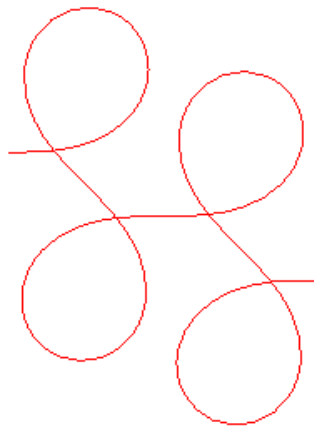
$$z = \int_0^t e^{ik \sin^2 u} du$$

Équation 3 : paramétrisation complexe selon Wewhell  
Gleichung 3 : komplexe Parametrisierung nach Wewhell

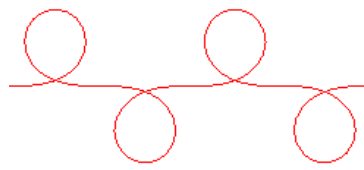
Ce type de courbe, d'une approche assez complexe, peut toutefois être représenté graphiquement au moyen de calculateurs numériques qui permettent d'en observer l'évolution globale sans passer par l'application numérique. Les exemples ci-dessous illustrent comment évolue une telle courbe en fonction du paramètre k :

Dieser Kurventyp, abgeleitet aus einem komplexen Ansatz, lässt sich mit Hilfe der meisten Digitalrechner, mit denen die Entwicklung beobachtet werden kann, grafisch darstellen. Die unten stehenden Beispiele illustrieren, wie sich eine derartige Kurve in Abhängigkeit vom Parameter k entwickelt:

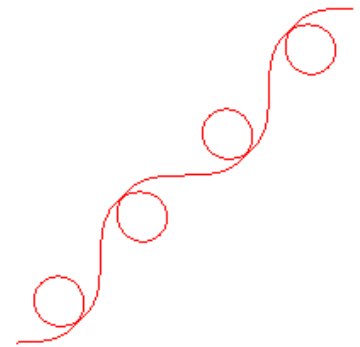




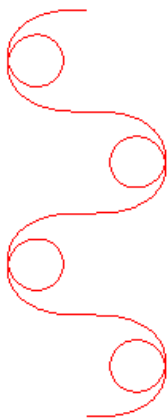
$$k = 7\pi/4$$



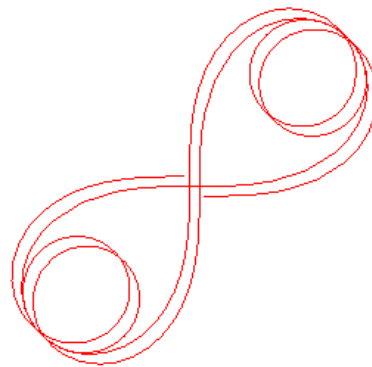
$$k = 2\pi$$



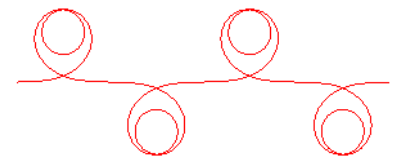
$$k = 5\pi/2$$



$$k = 3\pi$$



$$k = 7\pi/2$$



$$k = 4\pi$$

Figure 6 : variations de la courbe de giration  
 Abb. 6 : Variationen der Fahrkurve

Il est à noter que la courbe peut être bornée, pour certaines valeurs de  $k$  telle que:

Es ist festzuhalten, dass die Kurve für bestimmte Werte von  $k$  beschränkt sein kann, derart dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(k \sin^2 u) du = 0$$

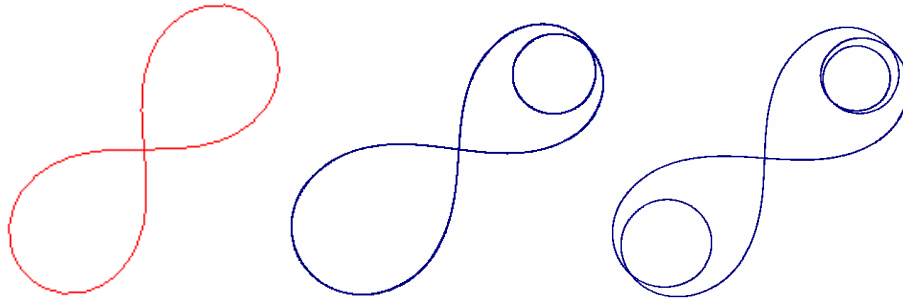


Figure 7 : exemple de courbes de giration bornées  
 Abb. 7 : Beispiel für beschränkte Fahrkurve

Lorsque la courbe n'est pas bornée, elle s'éloigne de l'origine selon une direction dont la tangente  $x/y$  a pour valeur la limite quand  $t$  tend vers l'infini. Cette valeur limite est donnée par :

Solange die Kurve nicht beschränkt ist, entwickelt sie sich vom Ursprung entlang einer Richtung, Tangente  $x/y$  hat als Wert ein Maximum, wenn  $t$  gegen unendlich geht. Dieser Grenzwert ergibt sich aus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = \frac{\int_0^t \cos\left(\frac{k}{2} \sin u\right) du}{\int_0^t \sin\left(\frac{k}{2} \sin u\right) du}$$

Cette particularité est évidente lorsque l'on considère l'animation qui montre l'évolution de la courbe en fonction du coefficient linéaire de braquage publié sur Internet à la page :

Diese Besonderheit ist offensichtlich, wenn man sich die Animation vergegenwärtigt, die die Entwicklung der Kurve in Abhängigkeit vom Lenkwinkelkoeffizienten zeigt, welche unter der folgenden Internetadresse zu sehen ist.:

<http://www.autoturn.ch/articles/giration/>

Comme expliqué plus haut, pour certaines valeurs, la similitude entre clothoïde (en bleu dans la figure suivante) et courbe de giration (en rouge dans la figure suivante) donne lieu à la comparaison suivante :

Wie weiter oben beschrieben, gibt die Ähnlichkeit zwischen Klothoide (in blau in der folgenden Darstellung) und der Rotationskurve (in rot in der folgenden Darstellung) für einige Werte Anlass zu folgendem Vergleich:

	Paramétrisation cartésienne Kartesische Parametrisierung	Équation intrinsèque Innewohnende Gleichung	Paramétrisation complexe Komplexe Parametrisierung
Courbe de giration Rotationskurve	$\begin{cases} x = a \int_0^t \cos\left(\frac{k}{2} \sin u\right) du \\ y = a \int_0^t \sin\left(\frac{k}{2} \sin u\right) du \end{cases}$	$2kR(\alpha) \sin\left(\frac{2s}{a}\right) = a$	$z = \int_0^t e^{ik \sin^2 u} du$
Clothoïde Klothoide	$\begin{cases} x = a \int_0^t \cos\left(\frac{k}{2} u\right) du \\ y = a \int_0^t \sin\left(\frac{k}{2} u\right) du \end{cases}$	$R(\alpha) = \frac{a^2}{4k}$	$z = \int_0^t e^{iku^2} du$

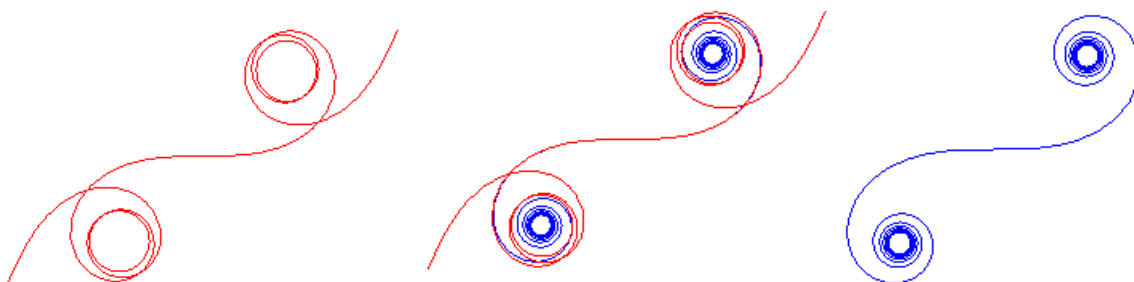


Figure 8 : comparaison clothoïde - courbe de giration (ici pour  $k=20$ )  
 Abb.8 : Vergleichung Rotationskurve - Klothoide (hier mit  $k=20$ )

Ce tableau met en évidence l'intervalle où la similitude des deux courbes est évidente, soit tant que  $u \approx \sin u$  (pour un angle exprimé en radians).

Diese Tabelle zeigt das Intervall, in dem die Ähnlichkeit der beiden Kurven offensichtlich ist, solange  $u \approx \sin u$  (für einen Winkel in Radiant).

## CONCLUSION

La comparaison et la superposition de ces courbes permettent de comprendre pourquoi on parle généralement de clothoïde dans le cas de la trajectoire, d'un véhicule standard. A titre anecdotique, il existe un type de véhicule dont l'angle de braquage n'est pas limité et dont la trajectoire peut décrire les volutes illustrées précédemment. Il s'agit des autos-tamponneuses que l'on trouve dans la plupart des fêtes foraines et dont le volant peut tourner sans limites. Mais restons pragmatiques, et si les véhicules n'épousent pas la parfaite clothoïde couramment utilisée dans le tracé de nos routes, ce ne sont pas non plus des auto-tamponneuses. Que les ingénieurs se rassurent donc, la marge d'erreur est faible, et les imperfections de conduite couvrent largement la différence théorique maintenant démontrée entre la courbe de giration et la clothoïde.

## SCHLUSSFOLGERUNG

Der Vergleich und die Überlagerung dieser Kurven erlauben zu verstehen, warum man zur Beschreibung der Fahrlinie eines Standardfahrzeugs im Allgemeinen von einer Klothoide spricht. Anmerkung: Es gibt einen Fahrzeugtyp, dessen Lenkwinkel nicht begrenzt ist und dessen Fahrlinie die zuvor gezeigte Spirale beschreiben kann. Es handelt sich um Auto-Scooter, wie man sie auf Jahrmärkten findet und deren Lenkrad sich ohne Anschlag drehen lässt. Bleiben wir pragmatisch, da die Kraftfahrzeuge üblicherweise auf unseren Straßen auf Klothoiden treffen und es sich nicht um Auto-Scooter handelt. Der Ingenieur muss sich im Klaren sein, dass der theoretische Unterschied gering ist und Verhaltensfehler beim Führen eines Fahrzeugs zu weitaus größeren Abweichungen führen können, als zwischen der Rotationskurve und der Klothoide.